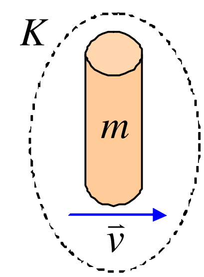
Chapitre 4.4 – Le moment d'inertie et l'énergie cinétique de rotation

L'énergie cinétique en rotation

L'énergie cinétique K est par définition l'énergie associée au mouvement d'un corps. Lorsque celui-ci effectue une translation, l'énergie cinétique dépend de l'inertie de translation qui est la masse m et du module de la vitesse v au carré :

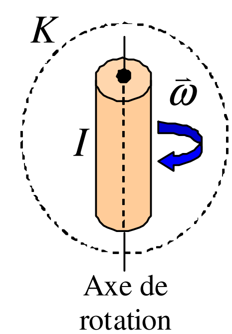


$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

où K : Énergie cinétique de translation (J)
m : Masse de l'objet (inertie de translation) (kg)
v : Vitesse de l'objet (m/s)

Lorsqu'un **corps** effectue une **rotation** à vitesse ω autour d'un axe, le corps est en mouvement et possède une **énergie cinétique**. Puisque l'ensemble du corps se déplace avec une vitesse angulaire commune ω, on peut définir une énergie à partir de cette vitesse. **L'inertie de rotation** I pour cette expression d'énergie <u>n'est pas uniquement la masse</u> m car l'énergie possède comme unité le joule ($\text{J} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$).

Afin de préserver la forme de l'expression de l'énergie cinétique, voici l'expression de l'énergie cinétique en rotation qui respecte l'unité du joule :



$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

où K : Énergie cinétique de l'objet en rotation (J)
I : Inertie de l'objet en rotation autour d'un axe ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
ω : Vitesse angulaire (rad/s)

<u>Validation des unités :</u>

Évaluons les unités de l'inertie de rotation à partir de la définition de l'énergie cinétique de rotation :

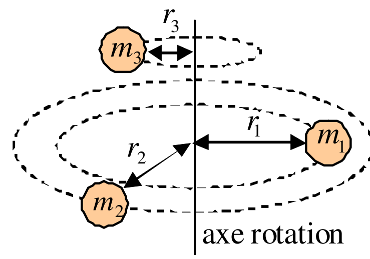
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \Rightarrow \quad [K] = \left[\frac{1}{2} I \omega^2\right] \qquad \text{(Évaluer les unités)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = [I] \frac{1}{\text{s}^2} \qquad \left([K] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \text{ et } [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{s}\right)$$

$$\Rightarrow \quad [I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad \blacksquare \qquad \text{(Simplifier)}$$

L'inertie en rotation

En rotation, l'inertie d'un corps dépend de sa masse, de sa force et de sa position par rapport à l'axe de rotation du corps. Lorsque le corps peut être décomposé en N masses ponctuelles m_i, l'inertie totale du corps sera égale à l'addition de toutes les inerties associées à chaque masse ponctuelle :



$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

où I : Inertie totale du système de masse ($\mathrm{kg \cdot m^2}$)

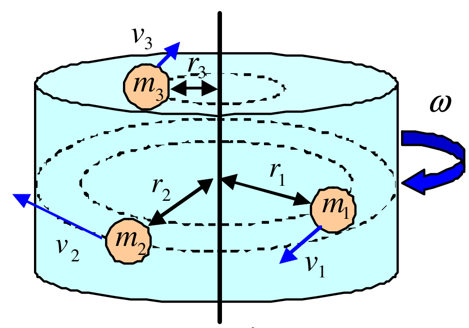
m_i : Masse ponctuelle i (kg)

r_i : Rayon de la trajectoire circulaire de la masse ponctuelle i (m)

N : Nombre de masses ponctuelles dans le calcul du moment d'inertie

<u>Preuve :</u>

Considérons un corps rigide de masse totale m constitué de N éléments de masse m_i effectuant une rotation autour d'un axe de rotation à une vitesse angulaire ω. Il est important de préciser que l'ensemble du corps tourne à une vitesse ω, mais que chaque élément m_i se déplace à une vitesse v_i et à une distance r_i de l'axe de rotation. Évaluons l'inertie totale du corps à partir de la définition de l'énergie cinétique :



$K = \sum_{i=1}^{N} K_i \quad \Rightarrow \quad K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$ (Remplacer $K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$)

$\Rightarrow \quad K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (r_i \omega_i)^2$ (Remplacer $v_i = r_i \omega_i$)

$\Rightarrow \quad K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega_i^2$ (Simplifier)

$\Rightarrow \quad K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$ (Vitesse angulaire commune, $\omega_i = \omega$)

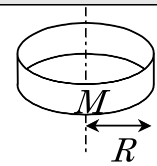
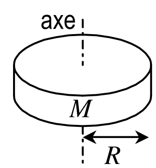
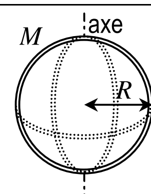
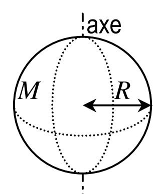
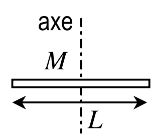
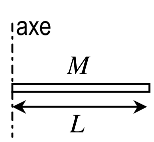
$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ (Factoriser les constantes dans la sommation)

$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{N} I_i$ (Inertie d'une particule ponctuelle, $I_i = m_i r_i^2$)

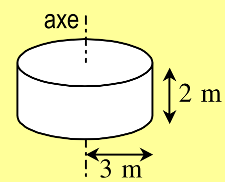
$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \blacksquare$ (Remplacer $I = \sum_{i=1}^{N} I_i$)

Moment d'inertie de différentes géométries

Voici un tableau de différentes géométries où le moment d'inertie a été calculé en fonction de la masse de l'objet, de sa forme et de sa position par rapport à l'axe de rotation. Les détails des calculs se trouvent dans le ***chapitre 4.5 : Le moment d'inertie par intégration***.

Géométrie	Situation	Schéma	Moment d'inertie
Cylindre	Cylindre creux de rayon R tournant autour de son axe de symétrie		$I = MR^2$
	Cylindre plein de rayon R tournant autour de son axe de symétrie		$I = \frac{1}{2}MR^2$
Sphère	Coquille sphérique mince de rayon R tournant autour de son centre		$I = \frac{2}{3}MR^2$
	Sphère pleine de rayon R tournant autour de son centre		$I = \frac{2}{5}MR^2$
Tige	Tige mince de longueur L tournant autour d'un axe perpendiculaire à elle-même passant par son centre		$I = \frac{1}{12}ML^2$
	Tige mince de longueur L tournant autour d'un axe perpendiculaire à elle-même passant par une extrémité		$I = \frac{1}{3}ML^2$

Situation 1 : ***L'énergie cinétique d'un cylindre en rotation.*** On désire calculer l'énergie cinétique d'un cylindre de cuivre de 3 m de rayon et de 2 m de hauteur qui tourne autour de son axe de symétrie à 500 tours par minutes. (Le cuivre a une masse volumique ρ de 8900 kg/m^3.)



Évaluer la masse totale du cylindre :

$$m = \rho V = \rho\left(\pi R^2 H\right) = (8900)\pi(3)^2(2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 5{,}03\times 10^5 \text{ kg}}$$

Évaluer le moment d'inertie du cylindre :

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}\left(5{,}03\times 10^5\right)(3)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 2{,}26\times 10^6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}$$

Évaluer la vitesse angulaire de rotation :

$$\omega = \frac{500 \text{ tours}}{1 \text{ min}}\times\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\times\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ tour}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 52{,}36 \text{ rad/s}}$$

Nous pouvons maintenant évaluer l'énergie cinétique :

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(2{,}26\times 10^6\right)(52{,}36)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = 3{,}10\times 10^9 \text{ J}}$$

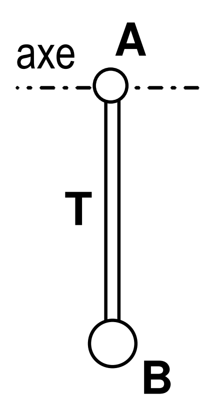
Situation 2 : ***Le moment d'inertie de deux particules reliées par une tige.*** Soit le système formé par une balle A de 1 kg reliée à une balle B de 2 kg par une mince tige homogène T de 3 m de longueur dont la masse vaux 0,5 kg. *Le diamètre des balles est négligeable par rapport à la longueur de la tige*. On fait tourner le système autour d'un axe perpendiculaire à la tige qui passe par la balle A. On désire calculer le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation.

Par rapport à l'axe de rotation, nous pouvons évaluer le moment d'inertie de nos trois objets :

$$I_{\text{A}} = mR^2 = (1)(0)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{A}} = 0}$$

$$I_{\text{B}} = mR^2 = (2)(3)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{B}} = 18 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}$$

$$I_{\text{T}} = \frac{1}{3}mL^2 = \frac{1}{3}(0{,}5)(3)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{T}} = 1{,}5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}$$



Nous avons le moment d'inertie total suivant :

$$I = \sum_{i=\text{A,B,T}} I_i \quad \Rightarrow \quad I = \sum_{i=\text{A,B,T}} I_i = I_{\text{A}} + I_{\text{B}} + I_{\text{T}}$$

$$\Rightarrow \quad I = (0) + (18) + (1{,}5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 19{,}5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}$$