Chapitre 3.11b – Les collisions élastiques

Les trois équations de la collision élastique en deux dimensions

Lors d'une collision élastique en deux dimensions entre deux objets A et B, nous pouvons appliquer la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe x et y et appliquer la conservation de l'énergie cinétique ce qui se résume aux équations suivantes :

Conservation de la quantité de mouvement selon l'axe x :

$$\sum p_{x\,f} = \sum p_{x\,i}$$

$$\Rightarrow \quad p_{x\mathrm{A}\,f} + p_{x\mathrm{B}\,f} = p_{x\mathrm{A}\,i} + p_{x\mathrm{B}\,i}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m_\mathrm{A} v_{x\mathrm{A}\,f} + m_\mathrm{B} v_{x\mathrm{B}\,f} = m_\mathrm{A} v_{x\mathrm{A}\,i} + m_\mathrm{B} v_{x\mathrm{B}\,i}}$$

Conservation de la quantité de mouvement selon l'axe y :

$$\sum p_{y\,f} = \sum p_{y\,i}$$

$$\Rightarrow \quad p_{y\mathrm{A}\,f} + p_{y\mathrm{B}\,f} = p_{y\mathrm{A}\,i} + p_{y\mathrm{B}\,i}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m_\mathrm{A} v_{y\mathrm{A}\,f} + m_\mathrm{B} v_{y\mathrm{B}\,f} = m_\mathrm{A} v_{y\mathrm{A}\,i} + m_\mathrm{B} v_{y\mathrm{B}\,i}}$$

Conservation de l'énergie cinétique :

$$K_f = K_i$$

$$\Rightarrow \quad K_{\mathrm{A}\,f} + K_{\mathrm{B}\,f} = K_{\mathrm{A}\,i} + K_{\mathrm{B}\,i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_\mathrm{A} v_{\mathrm{A}\,f}^{\;2} + \frac{1}{2} m_\mathrm{B} v_{\mathrm{B}\,f}^{\;2} = \frac{1}{2} m_\mathrm{A} v_{\mathrm{A}\,i}^{\;2} + \frac{1}{2} m_\mathrm{B} v_{\mathrm{B}\,i}^{\;2}$$

$$\Rightarrow \quad m_\mathrm{A} v_{\mathrm{A}\,f}^{\;2} + m_\mathrm{B} v_{\mathrm{B}\,f}^{\;2} = m_\mathrm{A} v_{\mathrm{A}\,i}^{\;2} + m_\mathrm{B} v_{\mathrm{B}\,i}^{\;2}$$

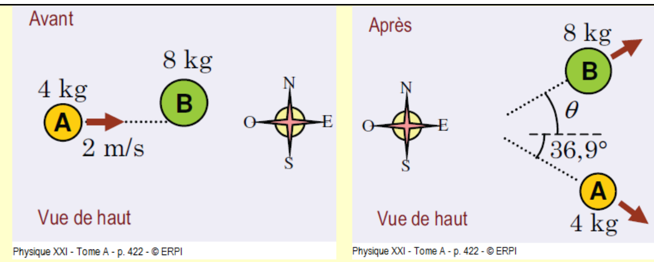
$$\Rightarrow \quad \boxed{m_\mathrm{A}\left(v_{x\mathrm{A}\,f}^{\;2} + v_{y\mathrm{A}\,f}^{\;2}\right) + m_\mathrm{B}\left(v_{x\mathrm{B}\,f}^{\;2} + v_{y\mathrm{B}\,f}^{\;2}\right) = m_\mathrm{A}\left(v_{x\mathrm{A}\,i}^{\;2} + v_{y\mathrm{A}\,i}^{\;2}\right) + m_\mathrm{B}\left(v_{x\mathrm{B}\,i}^{\;2} + v_{y\mathrm{B}\,i}^{\;2}\right)}$$

Puisque ce type de problème dispose de **trois équations**, il peut être résolu si les **inconnus** se limitent à **trois**. Une information sur une **orientation θ d'une vitesse** contribue à donner une **équation supplémentaire**.

Voici la liste des paramètres à déterminer lors d'une collision :

Objet	Masse	Vitesse initiale	Vitesse finale
A	m_A	$v_{x\mathrm{A}\,i}$ et $v_{y\mathrm{A}\,i}$	$v_{x\mathrm{A}\,f}$ et $v_{y\mathrm{A}\,f}$
B	m_B	$v_{x\mathrm{B}\,i}$ et $v_{y\mathrm{B}\,i}$	$v_{x\mathrm{B}\,f}$ et $v_{y\mathrm{B}\,f}$

Situation 5 : ***Une collision élastique en deux dimensions.*** Sur une surface horizontale sans frottement, deux rondelles de métal subissent une collision *élastique*. Avant la collision, la rondelle **A** (4 kg) se déplace à 2 m/s vers l'est, et la rondelle **B** (8 kg) est immobile.



Après la collision, la rondelle **A** se déplace à 36,9° au sud de l'est. On désire déterminer les modules des vitesses des rondelles après la collision ainsi que l'orientation de la vitesse de **B**.

Voici les informations disponibles après la lecture de l'énoncé :

Rondelle	Masse	Vitesse initiale	Vitesse finale
A	$m_A = 4\ \text{kg}$	$v_{xA\,i} = 2\ \text{m/s}$	$v_{xA\,f} = v_{A\,f}\cos(36{,}9°)$
		$v_{yA\,i} = 0$	$v_{yA\,f} = -v_{A\,f}\sin(36{,}9°)$
B	$m_B = 8\ \text{kg}$	$v_{xB\,i} = 0$	$v_{xB\,f}$
		$v_{yB\,i} = 0$	$v_{yB\,f}$

Appliquons la loi de la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe x :

$\sum p_{x\,f} = \sum p_{x\,i} \quad \Rightarrow \quad m_A v_{xA\,f} + m_B v_{xB\,f} = m_A v_{xA\,i} + m_B v_{xB\,i}$ (Selon dév. précédent)

$\Rightarrow \quad (4)(v_{A\,f}\cos(36{,}9°)) + (8)v_{xB\,f} = (4)(2) + (8)(0)$ (Remplacer val. num)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_{xB\,f} = 1 - 0{,}4\,v_{A\,f}}$ **(1)** (Isoler $v_{xB\,f}$)

Appliquons la loi de la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe y :

$\sum p_{y\,f} = \sum p_{y\,i} \quad \Rightarrow \quad m_A v_{yA\,f} + m_B v_{yB\,f} = m_A v_{yA\,i} + m_B v_{yB\,i}$ (Selon dév. précédent)

$\Rightarrow \quad (4)(-v_{A\,f}\sin(36{,}9°)) + (8)v_{yB\,f} = (4)(0) + (8)(0)$ (Remplacer val. num)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_{yB\,f} = 0{,}3\,v_{A\,f}}$ **(2)**

Appliquons la conservation de l'énergie cinétique :

$$K_f = K_i$$

$\Rightarrow \quad m_A\left(v_{xA\,f}^2 + v_{yA\,f}^2\right) + m_B\left(v_{xB\,f}^2 + v_{yB\,f}^2\right) = m_A\left(v_{xA\,i}^2 + v_{yA\,i}^2\right) + m_B\left(v_{xB\,i}^2 + v_{yB\,i}^2\right)$ (Eq. précédente)

$\Rightarrow \quad m_A\left(v_{xA\,f}^2 + v_{yA\,f}^2\right) + m_B\left(v_{xB\,f}^2 + v_{yB\,f}^2\right) = m_A v_{xA\,i}^2$ (Remplacer zéro)

$\Rightarrow \quad m_A v_{A\,f}^2 + m_B\left(v_{xB\,f}^2 + v_{yB\,f}^2\right) = m_A v_{xA\,i}^2$ ($v_{A\,f}^2 = v_{xA\,f}^2 + v_{yA\,f}^2$)

$\Rightarrow \quad (4)v_{A\,f}^2 + (8)\left(v_{xB\,f}^2 + v_{yB\,f}^2\right) = (4)(2)^2$ (Remplacer termes)

$\Rightarrow \quad \boxed{4v_{A\,f}^2 + 8\left(v_{xB\,f}^2 + v_{yB\,f}^2\right) = 16}$ **(3)** (Simplifier)

Développons les deux composantes de vitesse finale de la rondelle **B** à partir de l'équation **(1)** et **(2)** :

De **(1)** : $v_{xB\,f} = 1 - 0{,}4\,v_{A\,f} \quad \Rightarrow \quad (v_{xB\,f})^2 = (1 - 0{,}4\,v_{A\,f})^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{xB\,f}^{\;2} = 1 - 0{,}8 v_{A\,f} + 0{,}16 v_{A\,f}^{\;2}}$

De **(2)** : $v_{yB\,f} = 0{,}3 v_{A\,f} \quad \Rightarrow \quad (v_{yB\,f})^2 = (0{,}3 v_{A\,f})^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{yB\,f}^{\;2} = 0{,}09 v_{A\,f}^{\;2}}$

Remplaçons ces deux dernières équations dans l'équation (3) afin d'évaluer $v_{A\,f}$:

$$4 v_{A\,f}^{\;2} + 8\left(v_{xB\,f}^{\;2} + v_{yB\,f}^{\;2}\right) = 16$$

$\Rightarrow \quad v_{A\,f}^{\;2} + 2\left(\left(1 - 0{,}8 v_{A\,f} + 0{,}16 v_{A\,f}^{\;2}\right) + \left(0{,}09 v_{A\,f}^{\;2}\right)\right) = 4$ (Diviser par 4 et remplacer)

$\Rightarrow \quad v_{A\,f}^{\;2} + 2\left(1 - 0{,}8 v_{A\,f} + 0{,}25 v_{A\,f}^{\;2}\right) = 4$ (Simplifier)

$\Rightarrow \quad v_{A\,f}^{\;2} + 2 - 1{,}6 v_{A\,f} + 0{,}5 v_{A\,f}^{\;2} = 4$ (Distribuer facteur 2)

$\Rightarrow \quad \boxed{1{,}5 v_{A\,f}^{\;2} - 1{,}6 v_{A\,f} - 2 = 0}$ (Mettre forme $ax^2 bx + c = 0$)

Évaluons la solution au polynôme du 2$^{\text{ième}}$ degré :

$v_{A\,f} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad v_{A\,f} = \dfrac{-(-1{,}6) \pm \sqrt{(-1{,}6)^2 - 4(1{,}5)(-2)}}{2(1{,}5)}$ (Remplacer a, b et c)

$\Rightarrow \quad v_{A\,f} = \dfrac{1{,}6 \pm \sqrt{14{,}56}}{3}$ (Simplification)

$\Rightarrow \quad v_{A\,f} = \{-0{,}7386 \;,\; 1{,}805\}$ (Deux solutions)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_{A\,f} = 1{,}805 \text{ m/s}}$ (Module toujours positif)

Évaluons les vitesses finales de nos deux rondelles après la collision :

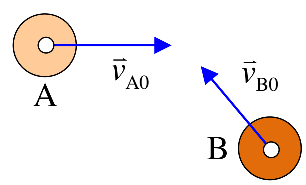
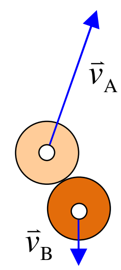
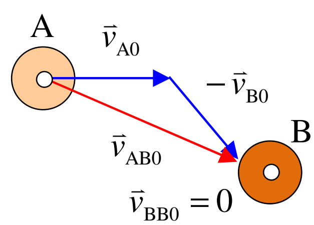
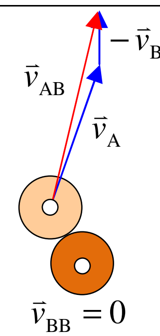
Rondelle	Selon l'axe x	Selon l'axe y	Module
A	$v_{xA\,f} = v_{A\,f}\cos(36{,}9°)$ $= (1{,}805)\cos(36{,}9°)$ $= 1{,}443 \text{ m/s}$	$v_{yA\,f} = -v_{A\,f}\sin(36{,}9°)$ $= (1{,}805)\sin(36{,}9°)$ $= -1{,}084 \text{ m/s}$	$v_{A\,f} = 1{,}805 \text{ m/s}$
B	$v_{xB\,f} = 1 - 0{,}4\,v_{A\,f}$ $= 1 - 0{,}4(1{,}805)$ $= 0{,}278 \text{ m/s}$	$v_{yB\,f} = 0{,}3 v_{A\,f}$ $= 0{,}3(1{,}805)$ $= 0{,}5415 \text{ m/s}$	$v_{yB\,f} = \sqrt{v_{xB\,f}^{\;2} + v_{yB\,f}^{\;2}}$ $= \sqrt{(0{,}278)^2 + (-0{,}5415)^2}$ $= 0{,}6087 \text{ m/s}$

Nous pouvons maintenant évaluer l'orientation de la rondelle **B** après la collision :

$\tan(\theta) = \dfrac{v_{yB\,f}}{v_{xB\,f}} \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) = \dfrac{(0{,}5415)}{(0{,}278)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 62{,}82° \text{ au nord de l'est}}$

La vitesse de rapprochement avant la collision et d'éloignement après la collision de deux objets ponctuels

Avant une collision et après une collision, on peut évaluer la vitesse de rapprochement et d'éloignement de deux objets ponctuels à l'aide d'un concept de vitesse relative :

	Avant la collision	Après la collision
	$\vec{v}_{\mathrm{AB0}} = \vec{v}_{\mathrm{A0}} - \vec{v}_{\mathrm{B0}}$	$\vec{v}_{\mathrm{AB}} = \vec{v}_{\mathrm{A}} - \vec{v}_{\mathrm{B}}$
Selon le référentiel au sol **S**		
Selon le référentiel **B**		

où $\vec{v}_{\mathrm{A0}}$: Vitesse de la sphère **A** avant la collision (m/s).

$\vec{v}_{\mathrm{B0}}$: Vitesse de la sphère **B** avant la collision (m/s).

$\vec{v}_{\mathrm{AB0}}$: Vitesse relative de **A** par rapport à **B** avant la collision (m/s).

$\vec{v}_{\mathrm{A}}$: Vitesse de la sphère **A** après la collision (m/s).

$\vec{v}_{\mathrm{B}}$: Vitesse de la sphère **B** après la collision (m/s).

$\vec{v}_{\mathrm{AB}}$: Vitesse relative de **A** par rapport à **B** après la collision (m/s).

<u>Preuve :</u>

Effectuons un calcul de vitesse relative à partir de deux objet **A** et **B** se déplaçant par rapport à un référentiel **S** :

$\vec{v}_{\mathrm{AB}} = \vec{v}_{\mathrm{AS}} + \vec{v}_{\mathrm{SB}}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}_{\mathrm{AB}} = \vec{v}_{\mathrm{AS}} - \vec{v}_{\mathrm{BS}}$ ($\vec{v}_{\mathrm{AB}} = -\vec{v}_{\mathrm{BA}}$)

$\Rightarrow$ $\vec{v}_{\mathrm{AB}} = \vec{v}_{\mathrm{A}} - \vec{v}_{\mathrm{B}}$ ■ (Retirer référence à **S**)

La comparaison des vitesses relatives lors d'une collision élastique entre deux objets ponctuels

Lors d'une collision élastique entre deux objets ponctuels **A** et **B**, si on impose la conservation de la quantité de mouvement ($\sum \vec{p} = \text{constante}$) et la conservation de l'énergie sous forme cinétique ($K = \text{constante}$), on obtient alors une contrainte sur la vitesse relatives $\vec{v}_{\text{AB0}}$ avant la collision et la vitesse relative $\vec{v}_{\text{AB}}$ après la collision des deux objets sous la forme suivante :

$$\vec{v}_{\text{AB}} = -\vec{v}_{\text{AB0}}$$

(pour une collision élastique entre deux objets ponctuels)

où $\vec{v}_{\text{AB}}$: Vitesse relative de **A** par rapport à **B** après la collision (m/s).

$\vec{v}_{\text{AB0}}$: Vitesse relative de **A** par rapport à **B** avant la collision (m/s).

Preuve :

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement à la collision entre deux objets ponctuels **A** et **B**, imposons la contrainte des vitesses relatives $\vec{v}_{\text{AB}} = -\vec{v}_{\text{AB0}}$ entre nos deux objets et vérifions qu'il y aura conservation de l'énergie cinétique. Pour la conservation de la quantité de mouvement, nous avons l'expression suivante :

$$\vec{p}_{\text{A}} + \vec{p}_{\text{B}} = \vec{p}_{\text{A0}} + \vec{p}_{\text{B0}} \quad \Rightarrow \quad m_{\text{A}}\vec{v}_{\text{A}} + m_{\text{B}}\vec{v}_{\text{B}} = m_{\text{A}}\vec{v}_{\text{A0}} + m_{\text{B}}\vec{v}_{\text{B0}} \qquad (\vec{p} = m\vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad m_{\text{A}}\vec{v}_{\text{A}} - m_{\text{A}}\vec{v}_{\text{A0}} = m_{\text{B}}\vec{v}_{\text{B0}} - m_{\text{B}}\vec{v}_{\text{B}} \qquad \text{(Regrouper terme)}$$

$$\Rightarrow \quad m_{\text{A}}(\vec{v}_{\text{A}} - \vec{v}_{\text{A0}}) = m_{\text{B}}(\vec{v}_{\text{B0}} - \vec{v}_{\text{B}}) \quad (\mathbf{1}) \qquad \text{(Factoriser } m_{\text{A}} \text{ et } m_{\text{B}})$$

Pour la contrainte sur les vitesses relatives, nous avons l'expression suivante :

$$\vec{v}_{\text{AB}} = -\vec{v}_{\text{AB0}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{\text{A}} - \vec{v}_{\text{B}} = -(\vec{v}_{\text{A0}} - \vec{v}_{\text{B0}}) \qquad (\vec{v}_{\text{AB}} = \vec{v}_{\text{A}} - \vec{v}_{\text{B}})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{\text{A}} + \vec{v}_{\text{A0}} = \vec{v}_{\text{B}} + \vec{v}_{\text{B0}} \quad (\mathbf{2}) \qquad \text{(Regrouper terme)}$$

À partir (**1**), effectuons un produit scalaire avec la relation (**2**) afin d'obtenir un terme en $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ ce qui formera un terme d'énergie cinétique pour ainsi démontrer qu'il y a conservation de l'énergie cinétique sous la contrainte des vitesses relatives :

$$m_{\text{A}}(\vec{v}_{\text{A}} - \vec{v}_{\text{A0}}) = m_{\text{B}}(\vec{v}_{\text{B0}} - \vec{v}_{\text{B}}) \qquad \text{(De (}\mathbf{1}\text{))}$$

$$\Rightarrow \quad m_{\text{A}}(\vec{v}_{\text{A}} - \vec{v}_{\text{A0}}) \cdot (\vec{v}_{\text{A}} + \vec{v}_{\text{A0}}) = m_{\text{B}}(\vec{v}_{\text{B0}} - \vec{v}_{\text{B}}) \cdot (\vec{v}_{\text{B}} + \vec{v}_{\text{B0}}) \qquad \text{(Produit scalaire avec (}\mathbf{2}\text{))}$$

$$\Rightarrow \quad m_{\text{A}}\left(v_{\text{A}}{}^2 + \vec{v}_{\text{A}} \cdot \vec{v}_{\text{A0}} - \vec{v}_{\text{A0}} \cdot \vec{v}_{\text{A}} - v_{\text{A0}}{}^2\right) = m_{\text{B}}\left(\vec{v}_{\text{B0}} \cdot \vec{v}_{\text{B}} + v_{\text{B0}}{}^2 - v_{\text{B}}{}^2 - \vec{v}_{\text{B}} \cdot \vec{v}_{\text{B0}}\right) \text{(Distribution)}$$

$$\Rightarrow \quad m_{\text{A}}\left(v_{\text{A}}{}^2 - v_{\text{A0}}{}^2\right) = m_{\text{B}}\left(v_{\text{B0}}{}^2 - v_{\text{B}}{}^2\right) \qquad (\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \text{ et simpli.})$$

$$\Rightarrow \quad m_{\text{A}}v_{\text{A}}{}^2 - m_{\text{A}}v_{\text{A0}}{}^2 = m_{\text{B}}v_{\text{B0}}{}^2 - m_{\text{B}}v_{\text{B}}{}^2 \qquad \text{(Distribuer } m_{\text{A}} \text{ et } m_{\text{B}})$$

$$\Rightarrow \quad m_{\text{A}}v_{\text{A}}{}^2 + m_{\text{B}}v_{\text{B}}{}^2 = m_{\text{A}}v_{\text{A0}}{}^2 + m_{\text{B}}v_{\text{B0}}{}^2 \qquad \text{(Réorganiser termes)}$$

Nous pouvons obtenir une expression illustrant la conservation de l'énergie cinétique :

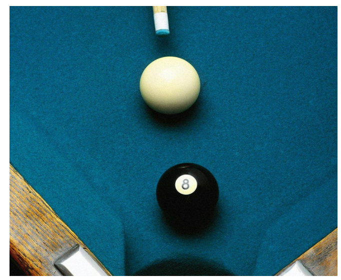
$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v_{A0}^2 + m_B v_{B0}^2 \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A0}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B0}^2 \qquad \text{(Multiplier par ½)}$$

$$\Rightarrow \quad K_A + K_B = K_{A0} + K_{B0} \quad \blacksquare \qquad (K = \frac{1}{2} m v^2)$$

La collision de deux objets non ponctuels

Dans le cadre de la théorie de la dynamique de la particule, il est impossible de déterminer les résultats d'une collision en deux dimension si l'on connaît uniquement les quatre conditions initiales v_{xAi} , v_{yAi} , v_{xBi} et v_{xBi} , car les trois équations disponibles (si la collision est élastique) ne permettent pas de solutionner les quatre inconnus de la situation finale (v_{xAf}, v_{yAf}, v_{xBf} et v_{xBf}).

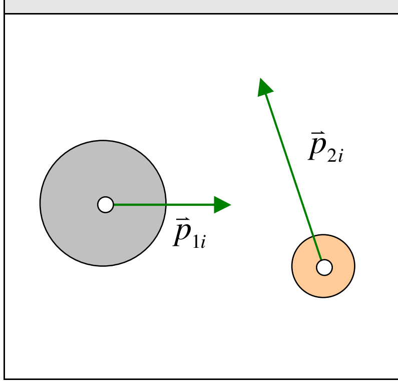
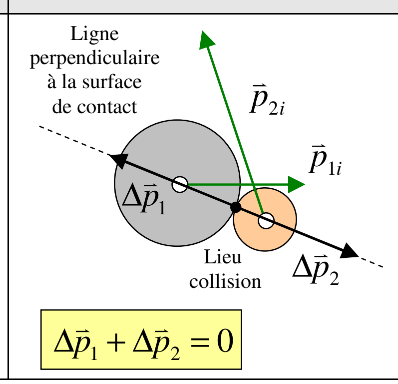
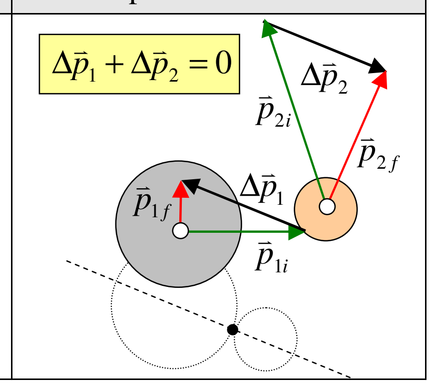


La collision élastique en deux dimensions entre deux objets non ponctuels comme le billard est un problème pouvant être résolu avec uniquement les conditions initiales du système (en négligeant le spin).

Par contre, si les **deux objets** peuvent être considérés comme étant **non ponctuel**, un **site de collision** peut être identifié sur les deux objets et introduit une **contrainte sur l'orientation des forces normales** appliquées entre les deux objets.

Ainsi, la variation de la quantité de mouvement $\Delta\vec{p}$ que subit les deux objets est de même valeur, mais de sens opposé (3$^{\text{ième}}$ loi de Newton) et elle s'effectue uniquement dans un **plan perpendiculaire à la surface de contact** dans la direction de la **force normale de contact**. Dans ce modèle de collision, on **néglige le frottement de contact** (force parallèle à la surface de contact).

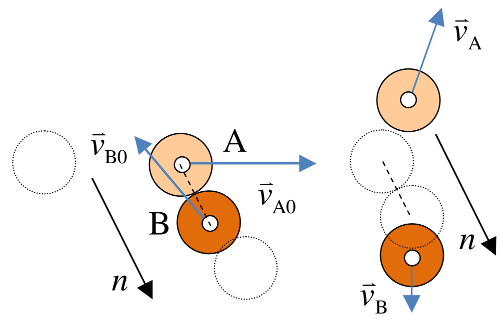
Voici une représentation vectorielle des échanges de la quantité de mouvement $\Delta\vec{p}$:

Avant la collision	Lieu de la collision	Après la collision
		

- ❖ Il y a conservation de la quantité de mouvement, car $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$.
- ❖ La quantité de mouvement finale de chaque objet est obtenu par $\vec{p}_f = \vec{p}_i + \Delta\vec{p}$.
- ❖ La valeur de $\Delta\vec{p}$ dépend de la nature de la collision (élastique ou inélastique).

La collision élastique en 3D entre deux objets sphériques (complément informatique)

Lors d'une collision élastique entre deux objets sphériques **A** et **B**, l'échange de quantité de mouvement $\vec{p}$, tout en respectant la conservation de l'énergie cinétique K, s'effectue selon un axe n reliant les deux centres des sphères. On peut déterminer la vitesse finale $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ de l'objet **A** et la vitesse finale $\vec{v}_{\mathrm{B}}$ de l'objet **B** à l'aide des équations suivantes :



Avant la collision Après la collision

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} = \vec{v}_{\mathrm{AB}} + \vec{v}_{\mathrm{B0}} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_{\mathrm{B}} = \vec{v}_{\mathrm{BB}} + \vec{v}_{\mathrm{B0}}$$

tel que

$$\vec{v}_{\mathrm{AB}} = \vec{v}_{\mathrm{AB0}} + \left(v_{n\mathrm{AB}} - v_{n\mathrm{AB0}}\right)\hat{n} \qquad \hat{n} = \hat{n}_{\mathrm{AB}} = \frac{\vec{r}_{\mathrm{B}} - \vec{r}_{\mathrm{A}}}{\left|\vec{r}_{\mathrm{B}} - \vec{r}_{\mathrm{A}}\right|}$$

$$\vec{v}_{\mathrm{AB0}} = \vec{v}_{\mathrm{A0}} - \vec{v}_{\mathrm{B0}} \qquad \vec{v}_{\mathrm{BB}} = -\frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}}}\left(v_{n\mathrm{AB}} - v_{n\mathrm{AB0}}\right)\hat{n}$$

$$v_{n\mathrm{AB0}} = \vec{v}_{\mathrm{AB0}} \cdot \hat{n} \qquad v_{n\mathrm{AB}} = \left(\frac{1 - m_{\mathrm{B/A}}}{1 + m_{\mathrm{B/A}}}\right) v_{n\mathrm{AB0}} \quad \text{où} \quad m_{\mathrm{B/A}} = \frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}$$

où
- $\vec{v}_{\mathrm{A}}$: Vitesse de la sphère **A** après la collision (m/s).
- $\vec{v}_{\mathrm{B}}$: Vitesse de la sphère **B** après la collision (m/s).
- $\vec{v}_{\mathrm{AB}}$: Vitesse relative de **A** par rapport à la vitesse initiale de **B** après la collision (m/s).
- $\vec{v}_{\mathrm{BB}}$: Vitesse relative de **B** par rapport à la vitesse initiale de **B** après la collision (m/s).
- $\vec{v}_{\mathrm{AB0}}$: Vitesse relative de **A** par rapport à **B** avant la collision (m/s).
- $v_{n\mathrm{AB}}$: Vitesse relative de **A** par rapport à la vitesse initiale de **B** selon l'axe n après la collision (m/s).
- $v_{n\mathrm{AB0}}$: Vitesse relative de **A** par rapport à **B** selon l'axe n avant la collision (m/s).
- $\hat{n}$: Orientation de l'axe passant par le centre de **A** vers le centre de **B**.
- $m_{\mathrm{B/A}}$: Rapport entre la masse de **B** et la masse de **A**.
- m_{A} : Masse de la sphère **B** (kg).
- m_{B} : Masse de la sphère **B** (kg).

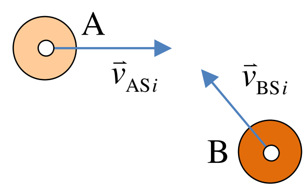
Remarque :

Cette solution est obtenue en respectant la conservation de la quantité de mouvement $\vec{p}$ et la conservation de l'énergie cinétique K à partir du **référentiel de la sphère B avant la collision**. Ainsi, les vitesses relatives sont évaluées par rapport au référentiel de la sphère **B** avant la collision ce qui donne $\vec{v}_{\mathrm{BB0}} = 0$ mais $\vec{v}_{\mathrm{BB}} \neq 0$.

Preuve :

Considérons un objet **A** de masse m_A et un objet **B** de masse m_B de forme sphérique se déplaçant dans le référentiel **S** avec les vitesses

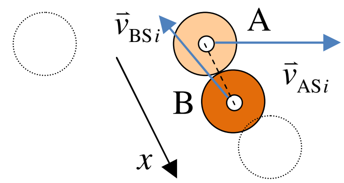
$$\vec{v}_{ASi} \text{ et } \vec{v}_{BSi} .$$



Avant la collision

Nous allons évaluer la vitesse de nos deux objets après une collision élastique. Puisqu'il y aura transfert de quantité de mouvement entre l'objet **A** et **B** dans la direction de la normale à la surface de nos deux sphères, nous allons définir un axe x entre nos deux objets en reliant la position $\vec{r}_A$ de l'objet **A** à la position $\vec{r}_B$ de l'objet **B** tel que

$$\hat{x} = \vec{i} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{\left|\vec{r}_B - \vec{r}_A\right|} .$$



À la collision

Pour faciliter les calculs et ainsi simplifier l'expression de nos lois physiques, nous allons réaliser notre collision dans le référentiel de la vitesse initiale de **B**. Nous obtenons ainsi la vitesse de nos deux objets **A** et **B** dans le référentiel **B** à l'aide des équations suivantes :

- $\vec{v}_{ABi} = \vec{v}_{ASi} + \vec{v}_{SBi} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{ABi} = \vec{v}_{ASi} - \vec{v}_{BSi}$
- $\vec{v}_{BBi} = \vec{v}_{BSi} + \vec{v}_{SBi} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{BBi} = \vec{v}_{BSi} + \left(-\vec{v}_{BSi}\right)$ (Vitesse relative : $\vec{v}_{SBi} = -\vec{v}_{BSi}$)

  $\Rightarrow \quad \vec{v}_{BBi} = 0$

Selon l'axe x, la composante en x de la vitesse de l'objet **A** dans le référentiel **B** avant la collision s'obtient après le calcul du produit scalaire[1]

$$v_{xABi} = \vec{v}_{ABi} \cdot \hat{x} .$$

Puisque la collision entre l'objet **A** et **B** est élastique, la collision doit respecter la conservation de la quantité de mouvement $\sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_i$ et la conservation de l'énergie cinétique $\sum K_f = \sum K_i$. Ces deux contraintes ayant été réalisées dans le **chapitre 3.11a** nous permet d'obtenir la composante de la vitesse de l'objet **A** selon l'axe x dans le référentiel **B** à l'aide de l'équation

$$v_{xABf} = \left(\frac{1 - m_{B/A}}{1 + m_{B/A}}\right) v_{xABi} \qquad \text{où} \qquad m_{B/A} = \frac{m_B}{m_A} .$$

[1] Le produit scalaire : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Puisque la variation de la quantité de mouvement $\Delta\vec{p}_{AB}$ de l'objet **A** durant la collision étant <u>uniquement selon l'axe *x*</u>, nous pouvons l'évaluer à l'aide du calcul suivant :

$$\Delta\vec{p}_{AB} = \vec{p}_{AB\,f} - \vec{p}_{AB\,i} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p}_{AB} = \left(p_{xAB\,f} - p_{xAB\,i}\right)\hat{x} \qquad \text{(Uniquement selon l'axe } x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{p}_{AB} = \left(m_A v_{xAB\,f} - m_A v_{xAB\,i}\right)\hat{x} \qquad (p_x = m v_x)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{p}_{AB} = m_A\left(v_{xAB\,f} - v_{xAB\,i}\right)\hat{x} \qquad \text{(Factoriser } m_A\text{)}$$

Cette variation de la quantité de mouvement $\Delta\vec{p}_{AB}$ nous permet de déterminer la quantité de mouvement finale $\vec{p}_{AB\,f}$ de l'objet **A** dans le référentiel **B** étant

$$\vec{p}_{AB\,f} = \vec{p}_{AB\,i} + \Delta\vec{p}_{AB}$$

ce qui nous permet d'évaluer la vitesse finale $\vec{v}_{AB\,f}$ de l'objet **A** dans le référentiel **B** à l'aide de l'expression suivante :

$$\vec{p}_{AB\,f} = \vec{p}_{AB\,i} + \Delta\vec{p}_{AB} \quad \Rightarrow \quad m_A\vec{v}_{AB\,f} = m_A\vec{v}_{AB\,i} + m_A\left(v_{xAB\,f} - v_{xAB\,i}\right)\hat{x} \qquad \left(\Delta\vec{p}_{AB} = m_A\left(v_{xAB\,f} - v_{xAB\,i}\right)\hat{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{AB\,f} = \vec{v}_{AB\,i} + \left(v_{xAB\,f} - v_{xAB\,i}\right)\hat{x} \qquad \text{(Simplifier } m_A\text{)}$$

Puisque qu'il y a conservation de la quantité de mouvement ($\sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_i$), nous pouvons affirmer qu'il y a transfert de quantité de mouvement entre **A** et **B** tel que

$$\Delta\vec{p}_{BB} = -\Delta\vec{p}_{AB} \ .$$

Nous pouvons ainsi déterminer la vitesse finale de **B** dans le référentiel **B** après la collision par le transfert de quantité de mouvement $\Delta\vec{p}_{BB}$ appliqué à l'objet **B** :

$$\vec{p}_{BB\,f} = \vec{p}_{BB\,i} + \Delta\vec{p}_{BB} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{BB\,f} = \Delta\vec{p}_{BB} \qquad (\vec{p}_{BB\,i} = 0\text{, car } \vec{v}_{BB\,i} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad m_B\vec{v}_{BB\,f} = \Delta\vec{p}_{BB} \qquad (\vec{p} = m\vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{BB\,f} = \frac{\Delta\vec{p}_{BB}}{m_B} \qquad \text{(Isoler } \vec{v}_{BB\,f}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{BB\,f} = \frac{-\Delta\vec{p}_{AB}}{m_B} \qquad (\Delta\vec{p}_{BB} = -\Delta\vec{p}_{AB})$$

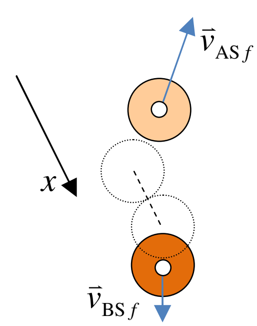
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{BB\,f} = -\frac{m_A}{m_B}\left(v_{xAB\,f} - v_{xAB\,i}\right)\hat{x} \qquad \left(\Delta\vec{p}_{AB} = m_A\left(v_{xAB\,f} - v_{xAB\,i}\right)\hat{x}\right)$$

Finalement, nous pouvons transformer nos vitesses finales dans le référentiel **S** et obtenir les vitesses de nos deux objets tel que

$$\vec{v}_{AS\,f} = \vec{v}_{AB\,f} + \vec{v}_{BS\,i}$$

et

$$\vec{v}_{BS\,f} = \vec{v}_{BB\,f} + \vec{v}_{BS\,i} \ . \quad \blacksquare$$



Après la collision